ГАТИН Г. Н.
ЗАГАДКИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

УДК 510.22, ВАК 05.13.17, ГРНТИ 20.01.07

Загадки теории множеств

Г. Н. Гатин

Ухтинский государственный технический университет, г. Ухта

Автор обращает внимание на то, что игнорирование некоторых свойств элементов множеств, может привести к нежелательным последствиям. В частности существуют множества элементы которых практически неотделимы друг от друга. Это приводит к тому, что к этим множествам неприменима аксиома выбора. Отделимость элементов множества материальное свойство. Поскольку аксиома выбора предполагает отделимость элементов друг от друга она, в свою очередь материальна.

Ключевые слова: *теория множеств, объект, элемент, множество, эксперимент*

Mysteries of set theory

G. N. Gatin

Ukhta State Technical University,Ukhta

The author draws attention to the fact that ignoring some properties of the elements of the set can lead to undesirable consequences. In particular, there are many elements of which are practically inseparable from each other. This leads to the fact that the axiom of choice does not apply to these sets. Separation of elements of a set is a material property. Since the axiom of choice presupposes the separability of elements from each other, it, in turn, is material.

Keywords: *set theory, object, element, set, experiment*

Поступая так, мы намереваемся давать законы на вечные времена.
Н. Бурбаки,
[3] стр 25

Введение

Теория множеств – сложившаяся математическая дисциплина. Сегодня в той или иной мере основы теории множеств даются в инженерных курсах математики и при этом сообщается, что вся математика может быть выведена из теории множеств. Автор ни в коей мере не пытается подвергнуть этот тезис сомнению, но обращает внимание на замечания Н. Бурбаки во введении [3, стр.29] "... за 40 лет с тех пор, как сформулировали с достаточной точностью аксиомы Теории множеств и стали извлекать из них следствия в самых разнообразных областях математики, ещё ни разу не встретилось противоречие, и можно с основанием надеяться, что оно не появится никогда." Другими словами, наша уверенность в непогрешимости математики, извините, в непротиворечивости, базируется на *вере*! Я верю в интуицию математиков и присоединяюсь к этой вере, но к базовой дисциплине «Теории множеств», у меня есть вопросы, ответы на которые я так и не нашёл.

Разбор непоняток (по крайней мере для меня) будем вести от интуитивной теории множеств. Ну так и слышу: "Разберитесь с аксиоматическим построением теории множеств и все ваши загадки отпадут сами собой." Ну во-первых: "Откуда вы это знаете? Сам Н. Бурбаки не так в этом уверен." Отсылаю несомневающихся на стр. 29 [3].

Во-вторых, в "Сводке результатов", см. сноску № 2 стр. 353 [3]: "Читатель не преминет заметить, что 'наивная' точка зрения, на которую мы встали в этой сводке для изложения основ Теории множеств, прямо противоположна 'формалисткой' точке зрения, принятой в выпусках Книги I," [3, стр. 353] В тексте же "Чтение Книги I ('Теория множеств') необходимо для читателей, желающих знать, как можно преодолеть логические трудности, вызываемые присутствием этих неопределяемых терминов" Другими словами, мы всё можем доказать чисто формально, но на практике используем 'наивную' точку зрения.

В третьих: изучение теории множеств, если вы не обладаете мазохисткими наклонностями, (понимание аксиоматики требует этого), начинается именно с 'наивной' точки зрения.

Итак:

"Георгу Кантору принадлежит следующее основополагающее высказывание: «Множество ─ это соединение в целое определённых различных объектов нашей интуиции или нашего мышления.»" [2]

Что можно вытащить из этого определения?

Множество образуется из объектов, называемых его элементами. Можно называть и точками множества, но термин "точка" ассоциирован с другими сущностями. Откуда либо объект, либо элемент, даже предмет и т.п..

Мы должны иметь возможность отличить один объект от другого. Здесь появляются первые трудности. Различные объекты в смысле отделимые друг от друга как шары в ящике - одинаковые, но отделимые. Различные объекты как результат сравнения объектов - разные, неодинаковые, и безусловно отделимые друг от друга..

В любом случае мы должны иметь возможность <u>отделять элементы множества друг от друга</u>. Всё же, "различные" трактуется как разные элементы. На основании этого заявляется, что во множестве не может быть одинаковых элементов. Ненормальность ситуации, однако, чувствуется сразу и появляются *множества* и *мультимножества*. Заметим, что Г. Кантор, такого различия на делал. Как иначе объяснить, что сразу начинается разбор количества точек на прямой, плоскости и т.д. Точки все одинаковые, и прямая и плоскость тогда мультимножества.

Вот и первая загадка: далее излагается теория *множеств*, о *мультимножествах* ни слова. Косвенно, даётся понять, что мультимножества ничего кроме дополнительных технических сложностей не приносят. Беда в том, что математики работают с мультимножествами, а отнюдь не со множествами, но работают с мультимножествами как со множествами. А.Б. Петровский [4] строит теорию мультимножеств так, что сохраняются свойства и операции множеств, но мультимножества имеют больше свойств и с ними можно определить операции, невыполнимые со множествами. Обычные же операции, применяемые к мультимножествам могут дать несколько неожиданные результаты (см. ниже)

Множество полностью определяется своими элементами.

Здесь появляется вторая загадка. Если элементы определяют множество, то при работе со множествами следует учитывать природу элементов. Но теория множеств строится так, чтобы максимально абстрагироваться именно природы от элементов. Вполне естественное стремление, математики строят как можно более общую теорию. Безусловно, нет смысла строить для каждого рода элементов свою теорию множеств. Однако, существуют некоторые свойства классов элементов, пренебрежение которыми приводит к проблемам. Автор надеется показать это ниже.

С последним выделенным курсивом тезисом связана ещё одна непонятка. Обычно, этот тезис основание для определения равенства множеств. Причём в большинстве источников приводятся примеры типа:

$A = \{1, 3, 0\}$ $B = \{1, 3, 0, 5\}$ $C = \{1, 3, ,3, 0, 0\}$ $D = \{3, 0, 1\}$

И сообщается, что $A \neq B$, но $A = C$ и $A = D$, а также $C = D$ и .т.п.

Ну не принимает наивный читатель равенства как A и C, так и C и D.

Думающий же стразу строит пример $Q = \{1, 3, 0, 0, 0....\infty....0\}$

Вот равенство конечного и бесконечного множеств действительно не хочется принимать.

Почему не введено понятие *состоять из одних и тех же элементов* отличное от *равенства* множеств? Мне кажется, что когда строилась теория множеств не было различия между множествами и мультимножествами.

Сегодня объяснение вышеприведённого определения равенства достаточно прозрачно. Мы сравниваем множество и мультимножество. Ни одной операции для мультимножеств мы не определили, так что сравнение незаконно. А. Б. Петровский [4, стр. 17] осторожно говорит "возможные способы *сопоставления* мультимножеств" и приводит *равные, равномощные, равновеликие, равноразмерные* мультимножества. (ого!)

Теория мультимножеств строится так, чтобы сохранить всё то, что наработано для множеств. Правда, при применении к мультимножествам самые естественные операции множеств могут дать, скажем так, нелепые результаты. Например:

$A = \{1, 0.. \infty..0\}$ $B = \{0, 1.. \infty..1\}$

$A \cup B = \{0, 1\}$ ($\cup$ - символ операции объединения)

Математики, однако, прекрасно чувствуют тонкие моменты и явных нелепостей избегают. К чему я это? Да к тому, что чаще всего математики работают с мультимножествами, а не со множествами. (Вот и ещё одна загадка: почему, по факту, нигде не приводится теория мультимножеств).

Давайте разберёмся, что есть что!

Любимое нами всеми множество точек прямой по сути мультимножество. Прямая состоит из бесконечной совокупности абсолютно одинаковых точек или, если рассматривать прямую как множество, бесконечной совокупности абсолютно неразличимых между собой элементов. При этом прямая обладает удивительным свойством: на любом кусочке прямой точек столько же сколь и на всей прямой. Ну это следствие бесконечной делимости прямой при её непрерывности. Но у прямой есть ещё одно достаточно неприятное свойство: ***элементы прямой неотделимы друг от друга***. Вы не можете выделить из прямой точку. Выкалывая из прямой точку вы всегда указываете некоторый отрезок, который в свою очередь содержит столько же точек сколь и вся прямая. То есть оперируя точками, мы уже оперируем множествами! (Если термин 'прямая' заменить на термин 'плоскость', то мы получим те же результаты.) С другой стороны: множество рациональных чисел всюду плотно, так что указывая точку на прямой мы попадаем на рациональное число, но никак на действительное.

Таким образом, прямая, в связи с неотделимостью элементов прямой друг от друга множеством не является. Но поскольку точки прямой можно поставить во взаимно-однозначное соответствие со множеством действительных чисел, то и действительные числа множеством не являются.

Однако, Г. Кантор не зря говорит "*объекты нашей интуиции или нашего мышления*". Мысленно мы можем выделить точку. С другой стороны, Г. Кантор не считал, что все элементы множества обязательно должны быть различными. С его точки зрения действительные числа *множество*! Автор, кстати, тоже придерживается этого мнения. Но особенности множества действительных чисел обязательно где-то скажутся. Чтобы выяснить где это проявится рассмотрим возражения на вышеприведённый длинный абзац.

Первое возражение против этого рассуждения: Автор опирается не древнее, фактически уже неиспользуемое определение множества. Построение аксиоматики теории множеств показывает, как обойти эти логические трудности. Тогда куда деть сноску № 2 стр. 353 [3]? Н. Бурбаки ясно показывает, что в реальности используется интуитивная теория множеств. Поэтому просто так от определения Г. Кантора не отмахнёшься.

Второе возражение против этого рассуждения совсем простое. Автор приводит физическую возможность, в то время как в определении множества *различные объекты нашей интуиции или нашего мышления*. Мысленно мы можем отделить точку от прямой.

Ох, чего только мы можем сделать мысленно. Мысленно мы можем левитировать и ещё многое. Давайте сделаем несколько мысленных экспериментов изрядно, правда, подправленных физикой. Здесь я придерживаюсь точки зрения В. И. Арнольда [1], что математика, та же физика, но эксперимент в математике стоит на несколько порядков меньше эксперимента в физике.

Начнём со старого доброго чёрного ящика в котором есть отверстие. В это отверстие мы не можем заглянуть, но можем сунуть руку и, если повезёт, вынуть что-либо из ящика.

Эксперимент первый: ящик заполнен твёрдыми шарами. Тогда, засунув руку в отверстие, мы легко извлекаем шар. Манипулируя ящиком, мы манипулируем всей совокупностью шаров. То есть совокупность шаров в ящике представляет собой множество в смысле Г. Кантора. Причём на этой совокупности шаров определены все обычные операции со множествами. Ярким примером таких множеств будут комплексы осадочных пород земной коры. Важно: в этом эксперименте мы можем извлечь элемент множества из самого множества.

Попутно вспомним контрпример Б. Рассела к аксиоме выбора. Это знаменитые совершенно одинаковые шнурки для которых нельзя построить функцию выбора. Поместите шнурки в чёрный ящик и ответьте, чем они отличаются от шаров.

Эксперимент второй: пусть ящик наполнен жидкостью, так что в жидкость можно погрузить руку. Тогда, засунув руку в ящик, мы понимаем, что там жидкость. Мы можем извлечь из ящика некоторую долю жидкости. Более того, если жидкость смачивает наши кожные покровы, то на руках останется некоторый слой жидкости.

Здесь, следует заметить: в жидкости нет "пустых мест", а между шарами есть пустоты.

Рассмотрим жидкость как множество. А почему нельзя? В конце-концов жидкость состоит из молекул, которые реально друг от друга отделимы, но одинаковы. То есть, жидкость типичное мультимножество. Вот только извлечь из этого мультимножества единичный элемент мы не можем. Природа элементов "жидкого" множества отлична от природы "твёрдых" множеств. Мало утверждать, что жидкость множество, надо показать, что все обычные операции над множествами выполнимы с жидкостями. Залежи нефти, воды, морские растворы ясно показывают выполнимость всех операций принятых со множествами.

Эксперимент третий: ящик заполнен газом. Тогда засунув руку в ящик мы не сможем сказать с уверенностью, что в ящике что-то есть. Это надо будет выяснять другими методами. Тем не менее, газ ведёт себя как мультимножество.

Читатель, безусловно, уже понял: целые числа - кристаллическая решётка; рациональные - заполнение кристаллической решётки; иррациональные, трансцендентные - жидкость в порах заполнения; гипервещественные числа - газ.

Согласен с критиками — это не математика. Но вот отделимость элементов множества друг от друга очень даже математика. Нравится нам это или нет, но действительные числа неотделимы друг от друга. Даже мысленно мы указываем некоторое рациональное приближение. "Абсолютно точно" мы указываем только π, e, $\sqrt{2}$ и т.п., но при работе с этими числами используем их рациональные приближения.

Но класс множеств состоящих из отделимых друг от друга элементов совпадает с классом дискретных множеств, который в свою очередь включён в класс счётных множеств.

Я не предлагаю ограничить теорию множеств лишь счётными множествами. Но где явно используется отделимость элементов друг от друга? Аксиома выбора! Известно, что аксиома выбора применима ко счётным множествам, но в общем случае, возникают проблемы. Аксиома выбора *материальна*. Она использует материальные свойства элементов. Её применение к идеальным – мысленным объектам обязательно вызовет (и вызывает) проблемы.

Список использованных источников и литературы

1. Арнольд В. И., Что такое математика? – М: МЦНМО, 2002. – 104 стр.

2. Архангельский А. В., Канторовская теория множеств. – М: Издательство Московского университета, 1988. – 112 с.

3. Бурбаки Н., Теория множеств. – М: МИР, 1965. – 455 с.

4. Петровский А. Б., Теория измеримых множеств и мультимножеств. – М: Наука, 2018. – 360 с.

List of references

1. Arnold V. I., What is mathematics? – M: MTsNMO, 2002. – 104 p.

2. Arkhangelskiy AV, Cantor set theory. – M: Publishing house of Moscow University, 1988. – 112 p.

3. Bourbaki N., Set theory. – M: MIR, 1965 . – 455 p.

4. Petrovsky AB, The theory of measurable sets and multisets. – M: Nauka, 2018 . – 360 p.